第９講　三角関数(2)

1　a を実数とする．方程式 $\cos^2 x - 2a\sin x - a + 3 = 0$ の解で $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲にあるものの個数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　長さ1の線分 AB を直径とする円周上の点を P とするとき，次の問いに答えよ．ただし，P は点 A，B とは異なるものとする．

(1)　$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とするとき，線分 AP，BP の長さを θ を用いて表せ．

(2)　P から AB に下ろした垂線と AB との交点を C とする．△APC と △BPC の周の長さの和 L を θ を用いて表せ．

(3)　L の最大値を求め，そのときの θ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標平面上の 3 本の直線 $x=0$，$y=0$ および $x+2y=8$ で囲まれた三角形の周上において，

$$z=\sin\frac{\pi x}{8}\cos\frac{\pi y}{4}+\cos\frac{\pi(x+2y)}{8}$$

の最大値，最小値と，それを与える x，y の値をそれぞれ求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　三角関数(2)

座標平面上で3点 $(0,\ 0)$，$(\pi,\ 0)$，$(0,\ \pi)$ を頂点とする三角形を考える．点 $(x,\ y)$ がこの三角形の辺上を動くとき，$\sin x\cos y+\cos(x+y)$ は

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi,\ \boxed{\text{ウ}}\right)$$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ をとり

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi,\ \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi\right)$$ のとき最小値 $-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　三角関数(2)

1　a を実数とする．方程式 $\cos^2 x-2a\sin x-a+3=0$ の解で $0\leqq x<2\pi$ の範囲にあるものの個数を求めよ．

$\cos^2 x-2a\sin x-a+3=0$ より　$1-\sin^2 x-2a\sin x-a+3=0$

$\sin^2 x+2a\sin x+a-4=0$　……①

$\sin x=t$ とおくと　$0\leqq x<2\pi$ において

$-1<t<1$ である t の値1個に対し，x の値は2個

$t=1,\ -1$ に対し，x の値はそれぞれ1個対応し，

$t<-1,\ 1<t$ である t の値に対応する x は存在しない．

①より　$t^2+2at+a-4=0$　……②

②の解の存在範囲について考える．

判別式 D について

$$\frac{D}{4}=a^2-(a-4)=a^2-a+4=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$$

より，②は異なる2つの実数解をもつ．

②の左辺を $f(t)$ とおくと，$f(t)=(t+a)^2-a^2+a-4$ より　軸：$t=-a$

また，$f(-1)=-a-3$　　$f(1)=3a-3$

(i)　$f(-1)>0,\ f(1)>0,\ -1<(\text{軸})<1$ のとき

$f(-1)>0$ より　$a<-3$　　$f(1)>0$ より　$a>1$

これらを同時に満たす a の値は存在しない．

(ii)　$f(-1)\cdot f(1)<0$ のとき

$(a+3)(a-1)>0$　　よって　$a<-3,\ 1<a$

このとき②は $-1<t<1$ に1解のみもち，それにより x の値は2個存在する．

(iii)　$f(-1)=0$ のとき

$a=-3$　このとき②は　$t^2-6t-7=0$　　$t=-1,\ 7$

よって，②は $t=-1$ と $1<t$ に1解ずつもち，それにより x の値は1個存在する．

(iv)　$f(1)=0$ のとき

$a=1$　このとき②は　$t^2+2t-3=0$　　$t=-3,\ 1$

よって，②は $t=1$ と $t<-1$ に1解ずつもち，それにより x の値は1個存在する．

(i)～(iv)以外のときは，②は $-1\leqq t\leqq 1$ に解をもたず，x の値は1個も存在しない．

以上より
$$\begin{cases} a<-3,\ 1<a \text{ のとき　2個} \\ a=-3,\ 1 \text{ のとき　1個} \\ -3<a<1 \text{ のとき　0個} \end{cases}$$

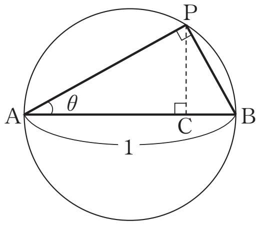
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　長さ1の線分 AB を直径とする円周上の点を P とするとき，次の問いに答えよ．ただし，P は点 A，B とは異なるものとする．

(1)　$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とするとき，線分 AP，BP の長さを θ を用いて表せ．

(2)　P から AB に下ろした垂線と AB との交点を C とする．△APC と △BPC の周の長さの和 L を θ を用いて表せ．

(3)　L の最大値を求め，そのときの θ の値を求めよ．



(1)　$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\theta=\boldsymbol{\cos\theta}$　　$\mathrm{BP}=\mathrm{AB}\sin\theta=\boldsymbol{\sin\theta}$

(2)　$\mathrm{PC}=\mathrm{AP}\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$

よって　$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PC}+\mathrm{CA}+\mathrm{BP}+\mathrm{PC}+\mathrm{CB}$

$=\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+1$

$=\boldsymbol{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1}$

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと，$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=t^2$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$

よって　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　より　$1<t\leqq\sqrt{2}$

$$L=2\cdot\frac{t^2-1}{2}+t+1=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

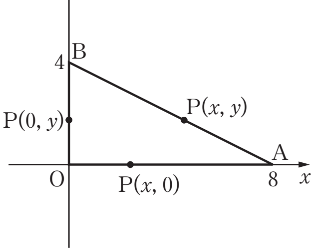
したがって　$t=\sqrt{2}$ のとき　L は最大値　$\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$ をとる．

また，このとき　$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$　　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$　より　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$

3　座標平面上の3本の直線 $x=0$，$y=0$ および $x+2y=8$ で囲まれた三角形の周上において，

$$z=\sin\frac{\pi x}{8}\cos\frac{\pi y}{4}+\cos\frac{\pi(x+2y)}{8}$$

の最大値，最小値と，それを与える x，y の値をそれぞれ求めよ．



右図のように O(0, 0)，A(8, 0)，B(0, 4) とし，$\mathrm{P}(x,\ y)$ が △OAB の周上を動くときを考える．

(i)　P が線分 OA 上のとき

$0\leqq x\leqq 8$，$y=0$

$$z=\sin\frac{\pi x}{8}+\cos\frac{\pi x}{8}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ より

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=(2,\ 0)$ のとき　最大値 $\sqrt{2}$

$\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$　つまり　$(x,\ y)=(8,\ 0)$ のとき　最小値 -1

(ii)　P が線分 AB 上のとき

$0\leqq y\leqq 4$, $x=8-2y$ より

$$z=\sin\frac{\pi(8-2y)}{8}\cos\frac{\pi y}{4}+\cos\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi y}{4}\right)\cos\frac{\pi y}{4}-1$$

$$=\sin\frac{\pi y}{4}\cos\frac{\pi y}{4}-1$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi y}{2}-1,\ 0\leqq\frac{\pi y}{2}\leqq 2\pi \text{ より}$$

$\frac{\pi y}{2}=\frac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=(6,\ 1)$ のとき　最大値 $-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi y}{2}=\frac{3}{2}\pi$　つまり　$(x,\ y)=(2,\ 3)$ のとき　最小値 $-\frac{3}{2}$

(iii)　P が線分 OB 上のとき

$x=0$, $0\leqq y\leqq 4$

$$z=\cos\frac{\pi y}{4},\ 0\leqq\frac{\pi y}{4}\leqq\pi \text{ より}$$

$\frac{\pi y}{4}=0$　つまり　$(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき　最大値 1

$\frac{\pi y}{4}=\pi$　つまり　$(x,\ y)=(0,\ 4)$ のとき　最小値 -1

(i)〜(iii)より

$(x,\ y)=(2,\ 0)$ のとき　最大値 $\sqrt{2}$

$(x,\ y)=(2,\ 3)$ のとき　最小値 $-\frac{3}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

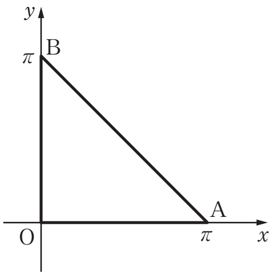
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　三角関数(2)

座標平面上で3点 $(0,\ 0)$，$(\pi,\ 0)$，$(0,\ \pi)$ を頂点とする三角形を考える．点 $(x,\ y)$ がこの三角形の辺上を動くとき，$\sin x\cos y+\cos(x+y)$ は

$(x,\ y)=\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi,\ \boxed{ウ}\right)$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{エ}}$ をとり

$(x,\ y)=\left(\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi,\ \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi\right)$ のとき最小値 $-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ をとる．



右図のように O$(0,\ 0)$，A$(\pi,\ 0)$，B$(0,\ \pi)$ とし，P$(x,\ y)$ が△OABの周上を動くときを考える．

$\sin x\cos y+\cos(x+y)=z$ とおく．

(i)　Pが線分OA上のとき

$0\leqq x\leqq\pi,\ y=0$

$z=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より

$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$ のとき　最大値 $\sqrt{2}$

$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$　つまり　$(x,\ y)=(\pi,\ 0)$ のとき　最小値 -1

(ii)　Pが線分AB上のとき

$0\leqq x\leqq\pi,\ y=\pi-x$

$z=\sin x\cos(\pi-x)+\cos\pi=\sin x(-\cos x)-1=-\dfrac{1}{2}\sin 2x-1$，$0\leqq 2x\leqq 2\pi$ より

$2x=\dfrac{3}{2}\pi$　つまり　$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき　最大値 $-\dfrac{1}{2}$

$2x=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$ のとき　最小値 $-\dfrac{3}{2}$

(iii)　Pが線分OB上のとき

$x=0,\ 0\leqq y\leqq\pi,\ z=\cos y$ より

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき　最大値 1　　$(x,\ y)=(0,\ \pi)$ のとき　最小値 -1

(i)〜(iii)より

$(x,\ y)=\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\pi,\ \mathbf{0}\right)$ のとき　最大値 $\sqrt{\mathbf{2}}$　　$(x,\ y)=\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\pi,\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\pi\right)$ のとき　最小値 $-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。